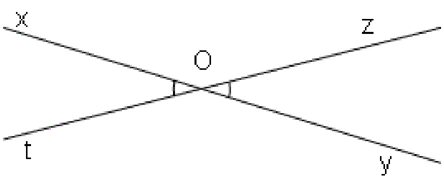
Cours sur les angles

I. Vocabulaire

1. Angles adjacents - Angles opposés par le sommet

Définition :
Deux angles sont opposés par le sommet s'ils ont le même sommet et des côtés dans le prolongement l'un de l'autre.

- Exemple :



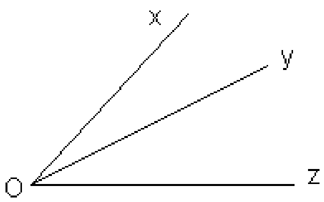
Les deux droites (xy) et (zt) sont sécantes en O .
Elles définissent 4 angles : $\widehat{xOt}$, $\widehat{tOy}$, $\widehat{yOz}$ et $\widehat{zOx}$.
Les angles $\widehat{zOx}$ et $\widehat{tOy}$ sont opposés par le sommet, ainsi que les angles $\widehat{xOt}$ et $\widehat{yOz}$.

Propriété :
Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure.

- Exemple : Dans l'exemple précédent : $\widehat{zOx} = \widehat{tOy}$ et $\widehat{xOt} = \widehat{yOz}$.

Définition :
Deux angles sont adjacents s'ils ont le même sommet et un côté commun et s'ils sont situés de part et d'autre du côté commun.

- Exemple :



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont deux angles adjacents.

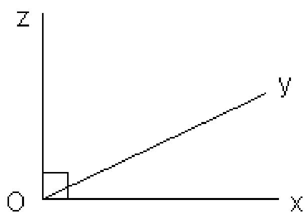
Attention : les angles $\widehat{xOz}$ et $\widehat{xOy}$ ne sont pas adjacents car ils ne sont pas situés de part et d'autre du côté commun [Ox).

Remarque : Si $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont deux angles adjacents alors l'angle $\widehat{xOz}$ mesure la somme des mesure des deux autres : $\widehat{xOz} = \widehat{xOy} + \widehat{yOz}$.

2. Angles complémentaires - Angles supplémentaires

Définition :
Deux angles sont complémentaires si la somme de leurs mesures est égale à 90°.

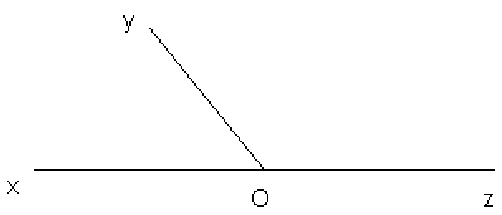
• Exemple :



Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont adjacents et complémentaires car $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 90^\circ$.

Définition :
Deux angles sont supplémentaires si la somme de leurs mesures est égale à 180°.

• Exemple :



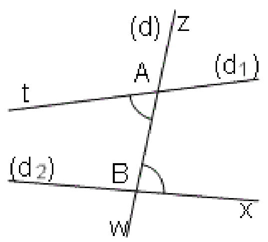
Les angles $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont adjacents et supplémentaires car $\widehat{xOy} + \widehat{yOz} = 180^\circ$.

3. Angles alternes-internes, angles correspondants.

On considère deux droites (d_1) et (d_2) coupées par une troisième (la sécante) (d).

Définition :
Les angles situés entre (d_1) et (d_2), de part et d'autre de (d) et non adjacents, sont alternes-internes.

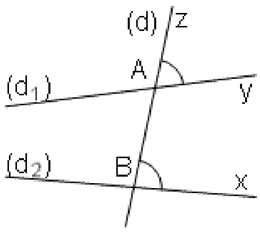
• Exemple :



Les angles $\widehat{tAw}$ et $\widehat{xBz}$ sur la figure ci-contre sont alternes-internes

Définition :
Les angles situés d'un même côté de (d), l'un à côté de (d_1) et l'autre du même côté de (d_2) sont correspondants.

• Exemple :



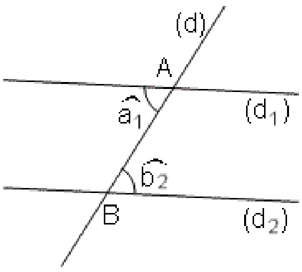
Les angles $\widehat{a_1}$ et $\widehat{xBz}$ sur la figure ci-contre sont correspondants.

II. Angles et parallélisme

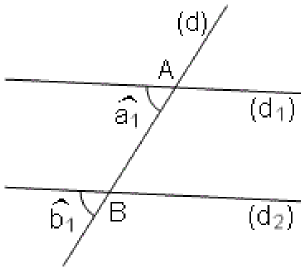
1. Propriétés

• Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors deux angles alternes-internes sont de même mesure.
• Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors deux angles correspondants sont de même mesure.

• Exemple : On considère deux droites (d_1) et (d_2) parallèles coupées par une sécante (d).



Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
Les angles $\widehat{a_1}$ et $\widehat{b_2}$ sont alternes-internes.
Donc $\widehat{a_1} = \widehat{b_2}$.

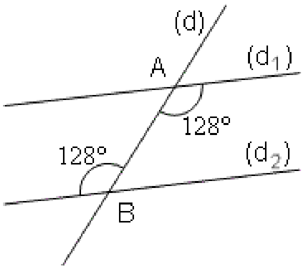


Les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
Les angles $\widehat{a_1}$ et $\widehat{b_1}$ sont correspondants.
Donc $\widehat{a_1} = \widehat{b_1}$.

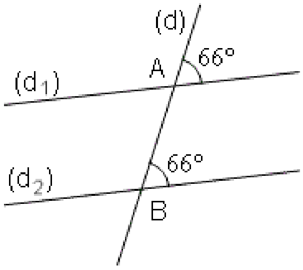
2. Propriétés réciproques

• Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.
• Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure, alors ces droites sont parallèles.

• Exemple : On considère deux droites (d_1) et (d_2) coupées par une sécante (d).



Les angles indiqués sur la figure sont alternes-internes et de même mesure (128°).
Donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.



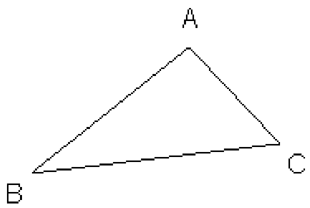
Les angles indiqués sur la figure sont correspondants et de même mesure (66°).
Donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

III. Somme des angles dans un triangle

1. Propriété

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

• Exemple :



Sur la figure ci-contre :

$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$

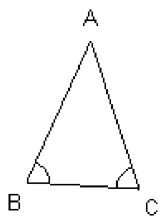
ou plus simplement : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

Soit $\hat{A} = 100^\circ$ et $\hat{B} = 30^\circ$.
Comme $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, alors $100 + 30 + \hat{C} = 180$
Soit $130 + \hat{C} = 180$.
Donc $\hat{C} = 180 - 130 = 50^\circ$.

2. Cas particuliers

Dans un triangle isocèle, les deux angles de base sont de même mesure.

• Exemple :



Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.
Donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ (ou $\hat{B} = \hat{C}$).

Si $\hat{A} = 40^\circ$, on a alors $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 40^\circ + 2\ \hat{B} =$

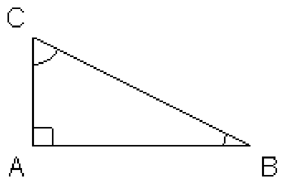
180°   Donc 2 B = 140° soit B = 140/2 = 70°.

Dans un <u>triangle équilatéral</u>, les trois angles mesurent 60°.

• Exemple :
les trois angles du triangle équilatéral sont de même mesure.
Donc si ABC est équilatéral, alors $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$. Donc $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 3\ \widehat{A} = 180°$. Donc $\widehat{A} = 60°$.

Dans un <u>triangle rectangle</u>, les deux angles aigus sont complémentaires.

• Exemple :



Le triangle ABC est rectangle en A.
Les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{B}$ sont donc complémentaires.
Donc $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$.
En effet, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ et $\widehat{A} = 90°$.